3. Sperimentazione sul calcolo numerico

Introduzione al calcolo strumentale nella scuola elementare[1]

Gianfranco Arrigo

The new project of teaching numerical calculation in primary school provides, in the second part of the cycle, the integration of the calculator in teaching and, where possible, of a computer. This article concludes the presentation of the three objectives of the experiment: mental calculation (with the techniques of calculation in line), approximate calculation (with suitably rounded data and the estimation of the results), instrumental calculation (education to the use of electronic for calculation).

1. I punti cardine della sperimentazione

Il nuovo progetto d'insegnamento del calcolo numerico nella scuola elementare prevede, a partire dalla quarta, l'integrazione della calcolatrice e, dove è possibile, del computer. Occorre affermare con estrema chiarezza che l'uso corretto di questi strumenti, oltre che aprire considerevolmente il ventaglio delle situazioni proponibili in classe, permette finalmente di eliminare le ricadute negative causate da un uso «selvaggio» delle nuove tecnologie, oggi diffuse capillarmente nella nostra società.

Affermazioni come:
– con l'introduzione della calcolatrice nella scuola
gli allievi non sanno più calcolare
– con l'introduzione del computer nella scuola
gli allievi non sanno più ragionare

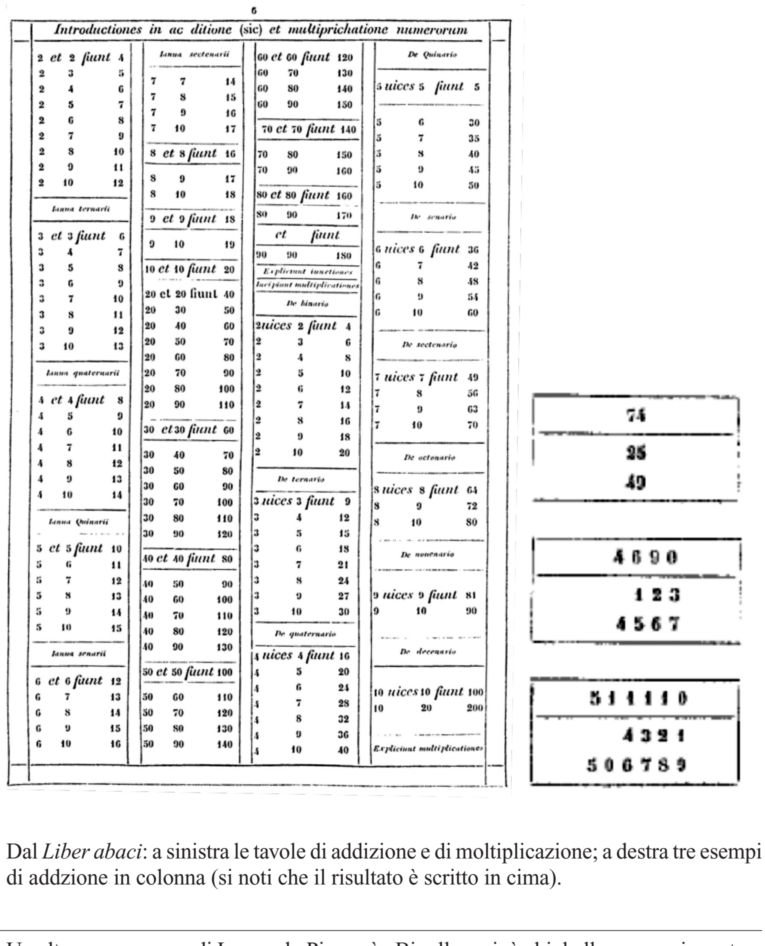
devono essere assolutamente contestate. La verità è che questi fenomeni negativi si verificano proprio quando la scuola non si preoccupa di insegnare il calcolo strumentale. Nella nostra scuola elementare si continua a insegnare gli algoritmi del calcolo in colonna, pensando che possano ancora essere utili nella continuazione degli studi e nella vita professionale. Nulla di più falso. Ancora una volta la tradizione scolastica gioca un ruolo preponderante: si continua a insegnare come si è sempre fatto, non considerando che nella società è appena avvenuta una delle più importanti rivoluzioni nel modo di calcolare: la diffusione del calcolo elettronico, resa possibile dalla tecnologia a basso costo. Il calcolo in colonna è stato introdotto nel nostro mondo da Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, con la famosa pubblicazione *Liber abacci* (più noto come *Liber abaci*) del 1202. Prima di allora per fare i calcoli si usava l'abaco,

1. Le considerazioni proposte in questo articolo sono anche frutto della collaborazione con Giorgio Mainini nell'ambito dei corsi per gli insegnanti della scuola elementare organizzati dalla Direzione generale dell'Istituto scolastico comunale della Città di Lugano.

strumento assai difficile da manipolare se si pretende un minimo rendimento, tanto è vero che per eseguire calcoli appena un po' complessi si doveva ricorrere agli abacisti, specialisti formati in scuole note per la loro severità.

Si racconta che Fibonacci, figlio di un gabelliere della Repubblica di Pisa, sia stato inviato dal padre nell'Africa settentrionale[2], segnatamente a Bugia (oggi chiamata Bejaia, porto algerino) perché si era accorto che i commercianti arabi erano in grado di eseguire speditamente i calcoli che i pisani erano costretti a far eseguire ai loro abacisti; sembra che ciò portasse agli arabi non pochi vantaggi nelle contrattazioni. Comunque sia stato, è evidente che Fibonacci entrò in stretto contatto con la cultura araba di quel tempo, in particolare con le opere di *al-Khwarizm* (vissuto Baghdad tra il 780 e l'850) e *Abu Kamil* (vissuto in Egitto tra l'850 e il 930).

La novità portata da Fibonacci consiste soprattutto nel sistema di numerazione decimale posizionale -quello che usiamo ancora oggi-, grazie al quale è possibile eseguire le operazioni numeriche in proprio, con carta e penna, senza dover rivolgersi a specialisti.



6

Introductiones in ac ditione (sic) *et multiprichatione numerorum*

2 et 2 fiunt 4
2 3 5
2 4 6
2 5 7
2 6 8
2 7 9
2 8 10
2 9 11
2 10 12
Ianua ternarii
3 et 3 fiunt 6
3 4 7
3 5 8
3 6 9
3 7 10
3 8 11
3 9 12
3 10 13
Ianua quaternarii
4 et 4 fiunt 8
4 5 9
4 6 10
4 7 11
4 8 12
4 9 13
4 10 14
Ianua Quinarii
5 et 5 fiunt 10
5 6 11
5 7 12
5 8 13
5 9 14
5 10 15
Ianua senarii
6 et 6 fiunt 12
6 7 13
6 8 14
6 9 15
6 10 16

Ianua sectenarii
7 7 14
7 8 15
7 9 16
7 10 17
8 et 8 fiunt 16
8 9 17
8 10 18
9 et 9 fiunt 18
9 10 19
10 et 10 fiunt 20
20 et 20 fiunt 40
20 30 50
20 40 60
20 50 70
20 60 80
20 70 90
20 80 100
20 90 110
30 et 30 fiunt 60
30 40 70
30 50 80
30 60 90
30 70 100
30 80 110
30 90 120
40 et 40 fiunt 80
40 50 90
40 60 100
40 70 110
40 80 120
40 90 130
50 et 50 fiunt 100
50 60 110
50 70 120
50 80 130
50 90 140

60 et 60 fiunt 120
60 70 130
60 80 140
60 90 150
70 et 70 fiunt 140
70 80 150
70 90 160
80 et 80 fiunt 160
80 90 170
et fiunt
90 90 180
Expliciunt iunctiones
Incipiunt multiplicationes
De binario
2 uices 2 fiunt 4
2 3 6
2 4 8
2 5 10
2 6 12
2 7 14
2 8 16
2 9 18
2 10 20
De ternario
3 uices 3 fiunt 9
3 4 12
3 5 15
3 6 18
3 7 21
3 8 24
3 9 27
3 10 30
De quaternario
4 uices 4 fiunt 16
4 5 20
4 6 24
4 7 28
4 8 32
4 9 36
4 10 40

De Quinario
5 uices 5 fiunt 5
5 6 30
5 7 35
5 8 40
5 9 45
5 10 50
De senario
6 uices 6 fiunt 36
6 7 42
6 8 48
6 9 54
6 10 60
De sectenario
7 uices 7 fiunt 49
7 8 56
7 9 63
7 10 70
De octonario
8 uices 8 fiunt 64
8 9 72
8 10 80
De nonenario
9 uices 9 fiunt 81
9 10 90
De decenario
10 uices 10 fiunt 100
10 20 200
Expliciunt multiplicationes

74
25
49

4690
123
4567

511110
4321
506789

Figura 1. Dal *Liber abaci*: a sinistra le tavole di addizione e di moltiplicazione; a destra tre esempi di addzione in colonna (si noti che il risultato è scritto in cima).

2. Un altro soprannome di Leonardo Pisano è «Bigollo», cioè «bighellone», appioppato – si dice – dal padre al figlio poco propenso a lavorare, perché attratto da questioni filosofiche e matematiche. Anche questo particolare può spiegare la decisione del padre di mandarlo a indagare sul modo di calcolare degli arabi.

La rivoluzione portata da Fibonacci stentò parecchio a diffondersi dalle nostre parti, comunque possiamo dire che da almeno sei-sette secoli tutti usano questo sistema di numerazione ed eseguono i calcoli numerici come li ha fatti conoscere Fibonacci. In questi secoli, però, si succedettero parecchi altri strumenti di calcolo, anche se interessarono per lo più piccole minoranze.

Fra i più noti ricordiamo: i procedimenti relativi alla moltiplicazione («egiziano», «per gelosia», «regoli di Nepero»); le addizionatrici meccaniche; le moltiplicatrici meccaniche; i metodi di calcolo con i logaritmi; il regolo calcolatore: lineare e quello a scala logaritmica usato fino alla metà del secolo scorso soprattutto dagli ingegneri; i grandi computer (1946: ENIAC – 1951: UNIVAC 1 – ecc.); i computer da tavolo (1965: Olivetti P101 – 1968: Compucorp – ecc.); i personal computer (1981: PC1 della IBM – 1982: Commodore 64 – 1984: MacIntosh, ecc.); le calcolatrici tascabili (1972: HP-35 – 1976: TI-30 – ecc.).

Ciò che sembra strano, ma sotto gli occhi di tutti, è che ben pochi si siano interessati a tutte queste rivoluzioni del modo di calcolare, e con essa la scuola. Dagli ultimi decenni del XX secolo a oggi è subentrato un altro fenomeno sociale: l'elettronica per tutti e a basso prezzo. Ciò ha fatto sì che i giovani (addirittura i bambini a partire dai tre anni) vengano sempre più a contatto con le nuove tecnologie. Se lasciati in balìa di se stessi, non imparano a servirsi opportunamente di questi strumenti sempre più raffinati e dalle enormi potenzialità. Continueranno a usare il computer unicamente per giocare e per navigare nella Grande Rete e faranno capo alla calcolatrice anche per calcolare 20×30. Sarebbero sufficienti queste riflessioni per stimolare gli insegnanti di ogni ordine scolastico a prendere seriamente in conto questo problema didattico centrale. Ma c'è di più. Se si introduce nella scuola lo strumento elettronico, integrandolo con gli altri strumenti di uso comune, si aprono le porte a nuove, finalmente possibili, attività didattiche. Si pensi a situazioni matematiche con molti dati, che possono avere più soluzioni o nessuna, che concernono numeri qualsiasi anche con parecchie cifre significative: fra essi ritroviamo molti problemi, anche ma non solo riguardanti la vita di tutti i giorni, che non sempre possono essere affrontati senza uno strumento di calcolo idoneo. In questa direzione si contribuisce ad avvicinare di più il lavoro scolastico alla realtà della vita e alla matematica stimolante: una cosa che molti allievi oggi chiedono.

Nel merito, presentiamo, a titolo di esempio, alcune affermazioni tratte dal programma di matematica della scuola primaria del vicino Canton Lucerna.

«Oggi tutte le allieve e gli allievi della scuola primaria possiedono una calcolatrice (…). Ma solo un impiego sensato della calcolatrice permette di non rovinare le loro abilità di calcolo. Mediante un'azione didattica mirata gli insegnanti possono condurre allieve e allievi a usare lo strumento in modo opportuno, per far fronte a determinate situazioni, come un qualsiasi altro legittimo sussidio didattico, e nel contempo a capire quando l'uso diventa abuso».

E ancora:

«La rinuncia all'insegnamento del calcolo in colonna non significa assolutamente una rinuncia al calcolo perché lo si sostituisce con un altro tipo di calcolo. Questo concerne particolarmente il calcolo in riga (das halbschriftlische Rechnen)*, che*

conduce da una parte ai fondamenti della teoria dei numeri e dell'algebra e dall'altra all'applicazione del calcolo a situazioni reali. Con il calcolo in riga si possono raggiungere anche importanti obiettivi come matematizzare, scoprire, argomentare e formulare».

2. Tecnica di base relativa all'uso della calcolatrice

Per un buon uso della calcolatrice occorre tenere presente tre principi.

1. Mai impostare un calcolo senza avere un'idea, una previsione, una stima del risultato che si vuole raggiungere.
2. Quando è possibile, un algoritmo risolutivo deve essere eseguito a macchina senza ricopiare risultati parziali su un foglio e ogni dato dev'essere introdotto una sola volta.
3. Ogni risultato ottenuto a macchina dev'essere confrontato con la stima effettuata e interpretato nel contesto del problema.

Sul punto 1:
è ben vero che i circuiti non sbagliano (tranne in casi molto complessi nei quali i residui decimali possono dare origine a clamorose degenerazioni), ma è altrettanto vero che anche il più semplice calcolo, come per esempio (77 × 88) può diventare (7 × 88), (77 × 8), (77 × 85), (77 × 89) ecc. in seguito a errori di battitura, che sono molto più frequenti di quanto si pensa solitamente.

Sul punto 2:
per eseguire a macchina il calcolo seguente:
(12,75 + 33,90) : (3 – 9,77)
non si calcola il valore di ciascuna parentesi, per poi ricopiarli su un foglietto e reintrodurli nell'ordine per eseguire la divisione, ma si procede per esempio così:

12.75 | + | 33.90 | = | ÷ | [(| 3 | – | 0.77 |)] | = | 20.919

(Il comando «=» fa eseguire tutti i calcoli fino a quel punto impostati; nella parte iniziale può sostituire le parentesi. I comandi «[(» e «)]» significano «parentesi aperta» e «parentesi chiusa»; variano a seconda del tipo di calcolatrice.)

Sul punto 3:
per capire meglio, consideriamo un esempio di problema.
«Tre amiche hanno vuotato i loro salvadanai. Il totale dei soldi ricavati lo suddivideranno in 7 parti uguali da versare ad altrettanti enti benefici. I contenuti, in franchi, erano i seguenti:
323,80   241,25   273,15
A quanto ammonta l'importo di ciascuna delle 7 parti?»

Modello di soluzione

a) Scriviamo dapprima l'algoritmo risolutivo nel linguaggio matematico: P = (323,80 + 241,25 + 273,15) : 7

b) Stimiamo il risultato:

$$P \cong (330+240+270):7 = 840:7 = (700+140):7 = 100+20 = 120$$

(Si noti l'importanza del calcolo in riga nella stima del risultato.)

c) Usiamo la calcolatrice:

[323.80] [+] [241.25] [+] [273.15] [=] [÷] [7] 119.742857142

d) Interpretiamo il risultato:

Trattandosi di franchi, il risultato si può esprimere in almeno tre modi:
119,74 CHF, 119,75 CHF oppure 120 CHF

L'ultima interpretazione coincide addirittura con la stima fatta. Ciò ci permette di dire che il calcolo approssimato è importante e assolutamente da rivalutare e rende evidente il ruolo decisivo del calcolo mentale con la scrittura in riga.

La rappresentazione grafica della sequenza di comandi (vedere il punto c) è importante perché con essa si può studiare nei dettagli il metodo seguito. Ciò non significa affatto che la si debba redigere ogni volta: torna utile quando, ad esempio, si tratta di cercare un errore oppure di esaminare modi diversi di eseguire lo stesso calcolo.

Vediamo un esempio di procedimenti diversi.

«Alla fine dell'anno i 279 uomini e le 148 donne impiegati di una banca ricevono una gratifica ottenuta suddividendo equamente un importo di 1'003'450 franchi. A quanto ammonta la gratifica di ogni impiegato?»

Algoritmo risolutivo[3]: 1'003'450 : (279 + 148)

Esecuzione

Primo modo:

[1'003'450] [÷] [[(] [279] [+] [148] [)]] [=] 2350

Secondo modo:

[279] [+] [148] [=] [Min] [1'003'450] [÷] [MR] [=]

(I comandi Min e MR significano nell'ordine «memorizza» e «richiama dalla memoria»; variano a seconda del tipo di calcolatrice.)

3. In questo esempio ci occupiamo solo della tecnica di uso della calcolatrice.

Terzo modo:

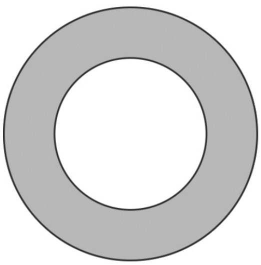
279 + 148 = ÷ 1'003'450 = 1/x

(Il comando 1/x restituisce il reciproco del risultato precedente.)

I tre modi sono corretti. Ciascuno ha le sue particolarità. Preferirne uno è solo questione soggettiva. È importante che ogni allievo conosca le varie possibilità, per poter scegliere di volta in volta a seconda del tipo di calcolo da eseguire.

3. Esempi di problemi risolvibili con la calcolatrice

3.1. Determinare l'area di una corona circolare



Raggio esterno: 37,0 cm   Raggio interno: 17,0 cm

a) Espressione numerica per il calcolo dell'area in cm^2
$\pi \times 37 \times 37 - \pi \times 17 \times 17$
oppure
$\pi \times 37^2 - \pi \times 17^2$
oppure ancora
$\pi \times (37^2 - 17^2)$
(Le due ultime espressioni possono anche essere tralasciate.)

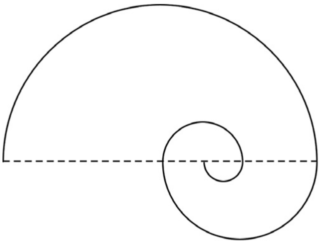
b) Stima del risultato
$3 \times 40 \times 40 - 3 \times 20 \times 20 = 3 \times 1600 - 3 \times 400 = 4800 - 1200 = 3600$

c) Esecuzione con la calcolatrice

π × 37 × 37 − π × 17 × 17 = 3392.92

d) Confronto con la stima e interpretazione del risultato
Risultato credibile, valore comunicabile 3393 cm^2.

3.2. Determinare la lunghezza di una spirale circolare



La spirale è formata da 4 semicirconferenze. La più grande ha il diametro di 1,35 m; ogni semicirconferenza successiva ha diametro metà di quello della precedente.
Si vuole sapere quanto è lunga la spirale.

a) Espressione numerica per il calcolo della lunghezza in metri
$(\pi \times 1{,}35) : 2 + (\pi \times 1{,}35 : 2) : 2 + (\pi \times 1{,}35 : 4) : 2 + (\pi \times 1{,}35 : 8) : 2 =$
$= (\pi \times 1{,}35) : 2 + (\pi \times 1{,}35) : 4 + (\pi \times 1{,}35) : 8 + (\pi \times 1{,}35) : 16$

b) Stima del risultato in metri
$4 : 2 + 4 : 4 + 4 : 8 + 4 : 16 = 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 3{,}75$

c) Esecuzione con la calcolatrice

π × 1.35 = Min

÷ 2 + MR ÷ 4 + MR ÷ 8 + MR ÷ 16 = 3.976078202

d) Confronto con la stima e interpretazione del risultato
Risultato credibile, valore comunicabile 3,98 m

3.3. Backup

Desideriamo salvare i nostri files su un DVD della capacità di 4,7 GB con spazio a disposizione di 4,387 GB. Vorremmo salvare le seguenti cartelle; lavori (1311 MB); contabilità (26 MB); corrispondenza (57 MB); giochi (276 MB); fotografie (686 MB) e, se possibile, anche la cartella sistema che occupa 2025 MB. Sarà possibile?

a) Espressione risolutiva (in MB)
4387 – (1311 + 26 + 57 + 276 + 686)

b) Stima del risultato
4400 – (1300 + 20 + 50 + 280 + 700) = 4400 – (2000 + 300 + 50) =
= 4400 – 2350 = 2050

c) Esecuzione con la calcolatrice

4387 – [(1311 + 26 + 57 + 276 + 686)] = 2031

d) Risultato credibile; rispondiamo che anche la cartella sistema può essere registrata sul DVD che risulterà in seguito praticamente pieno.

4. Conclusione

Questo articolo continua la serie di interventi relativi alle diverse sperimentazioni in atto, scritti che hanno lo scopo di stimolare gli insegnanti della scuola obbligatoria affinché si indirizzino decisamente e al più presto verso un insegnamento aggiornato del calcolo numerico. Le tappe importanti sono tre:

– Calcolo mentale con le tecniche del calcolo in riga che possono tranquillamente sostituire gli algoritmi arabici (calcolo in colonna).
– Calcolo approssimato con dati opportunamente arrotondati e stima di risultati.
– Calcolo strumentale mediante calcolatrice e computer.

L'introduzione della calcolatrice è stata ampiamente presentata in questo articolo. Alla scuola, e in particolare ai quadri e agli insegnanti, spetta il compito di compiere questo importante passo, senza titubanza. Dalle impressioni raccolte fra gli insegnanti emergono tre preoccupazioni.

La prima concerne la falsa credenza che l'introduzione della calcolatrice finisca per influire negativamente sulle capacità di calcolo mentale degli allievi, cosa che le sperimentazioni in atto stanno chiaramente smentendo.

La seconda concerne l'insegnante che si sente, almeno in un primo tempo, un po' destabilizzato perché si trova a dover introdurre in classe uno strumento ben più raffinato di quelli tradizionali, che – almeno per certuni – non sa bene padroneggiare. Usare bene una calcolatrice non è affatto difficile. Pochi però lo sanno fare – che siano persone adulte o studenti – perché, salvo i soliti appassionati e autodidatti, a scuola non si è mai insegnato.

Il terzo motivo di preoccupazione è relativo all'importante cambiamento che la calcolatrice induce nella creazione di situazioni di apprendimento. Con essa si possono manipolare dati «complicati», il che non vuol dire «complicati artificiosamente», ma –finalmente, diremmo- dati realistici. Come già accennato, gli allievi stessi chiedono che la scuola sia più vicina alla vita di tutti i giorni. Problemi come quelli esemplificati in precedenza sono pensati in questa direzione. Agli insegnanti spetta il compito di ideare nuove situazioni didattiche, nuovi problemi.

Infine, come ampiamente presentato sia in questa sede sia negli articoli precedenti, la calcolatrice «parla il linguaggio matematico» e offre così la possibilità di imparare a calcolare tranquillamente, come in un gioco, semplici espressioni numeriche con le quattro operazioni aritmetiche. Ma c'è di più: la calcolatrice offre tasti (o comandi) «strani», come ad esempio «π», «1/x», «%», «x^2», «x!», dietro ai quali sta una bella matematica che sarebbe anche utile ogni tanto almeno esplorare. Come dire, e mi ripeto: la calcolatrice stimolatrice dell'apprendimento. Lo stesso discorso vale per il computer.